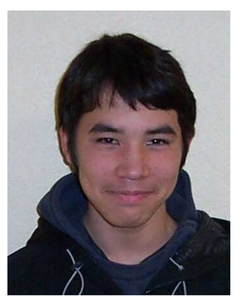
Quelques Séries Convergentes et Relations Itératives en Mathématiques

Rick Bourget, Simon Chanvry, Farouk Friha, Max Guibert, (Élèves, Lycée Essouriau),
Karine Ait-Abdelkader, Dominique Peraud et Khalid Yahia (professeurs, Lycée Essouriau),
Jennifer Grigel et Martin G. Lüling, (Schlumberger)

janvier – février 2006

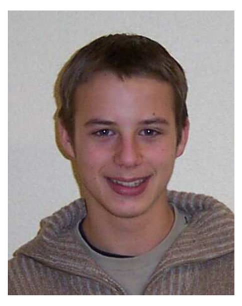
Abstract

En mathématiques, beaucoup de problèmes peuvent être résolus approximativement par des séries numériques ou une relation itérative. Une telle série ou relation doit converger en une limite précise, pour donner des résultats compréhensibles. Cette étude analyse quelques exemples de séries convergentes et de relations itératives. L'analyse se concentre sur le comportement de la convergence et la non-conformité résiduelle d'une limite précise. Les exemples incluent la série de Taylor de fonctions trigonométriques et la série de Fibonacci, ainsi que les solutions itératives des équations quadratiques et des moyennes arithmétiques.


Rick Bourget


Simon Chanvry


Farouk Friha

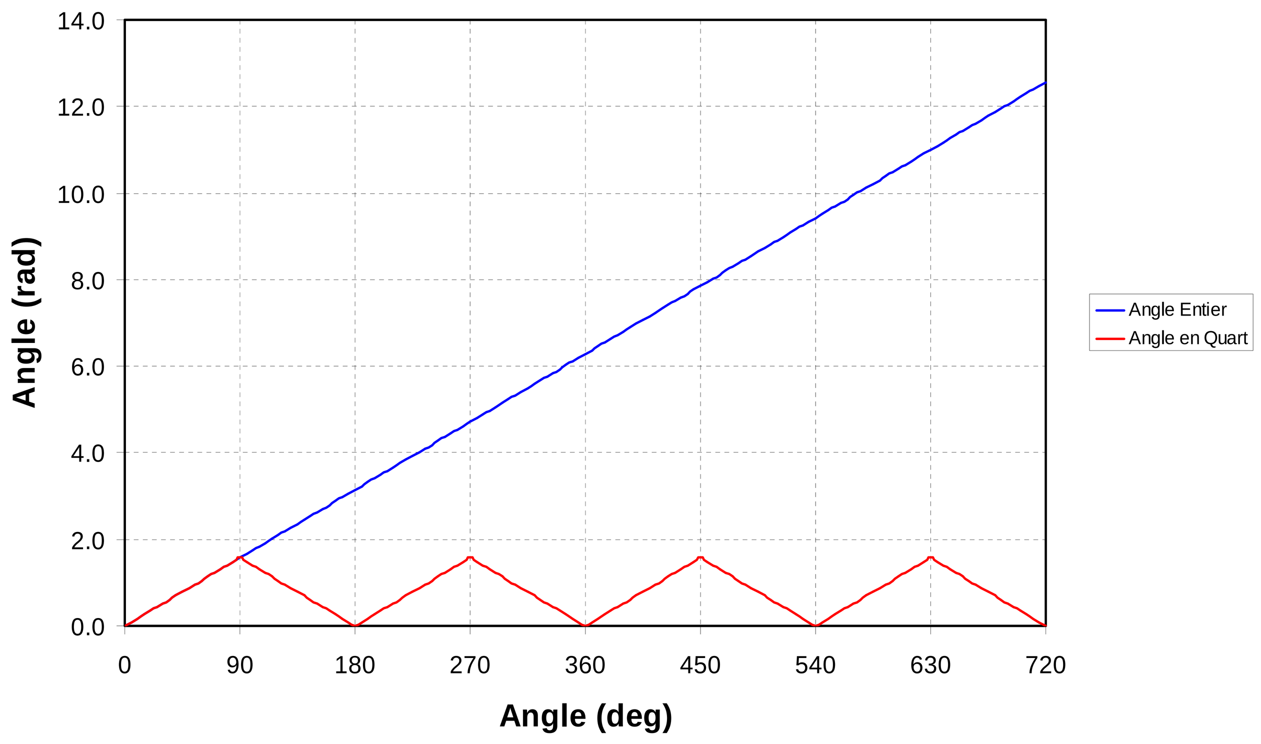

Max Guibert


Karine Ait Abdelkader


Dominique Peraud

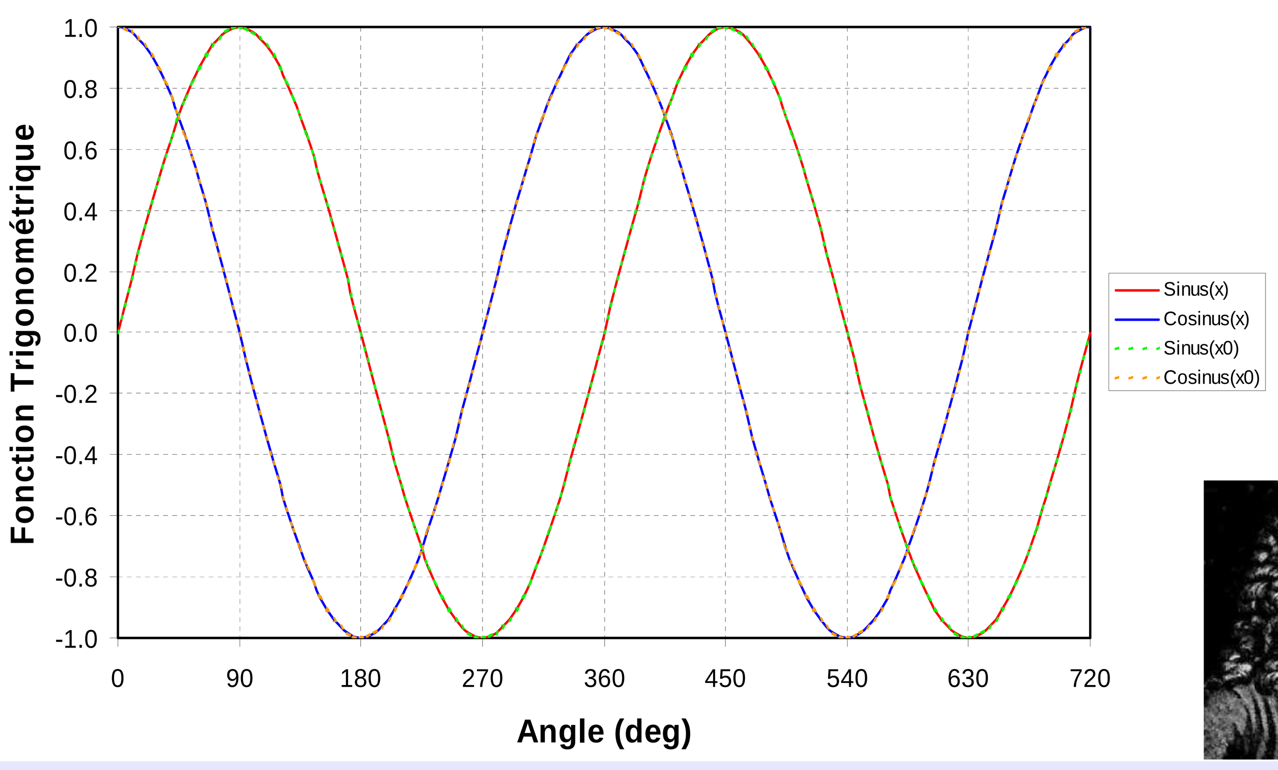
L'angle entier sur deux cycles (0°– 720°) est reduit aux angles d'un quart (0°– 90°).
Nous utilisons les radians plutôt que les degrés: 360° ⇔ 2π
Nous determinons π par l'identité: $\pi = 4 \cdot \arctan(1)$

Gamme Angulaire



Les fonctions trigonométriques sin(x) et cos(x) donnent les même resultats sur la gamme entière d'angles et la gamme reduite d'angles, mais attention aux signes, qui changent par quart.

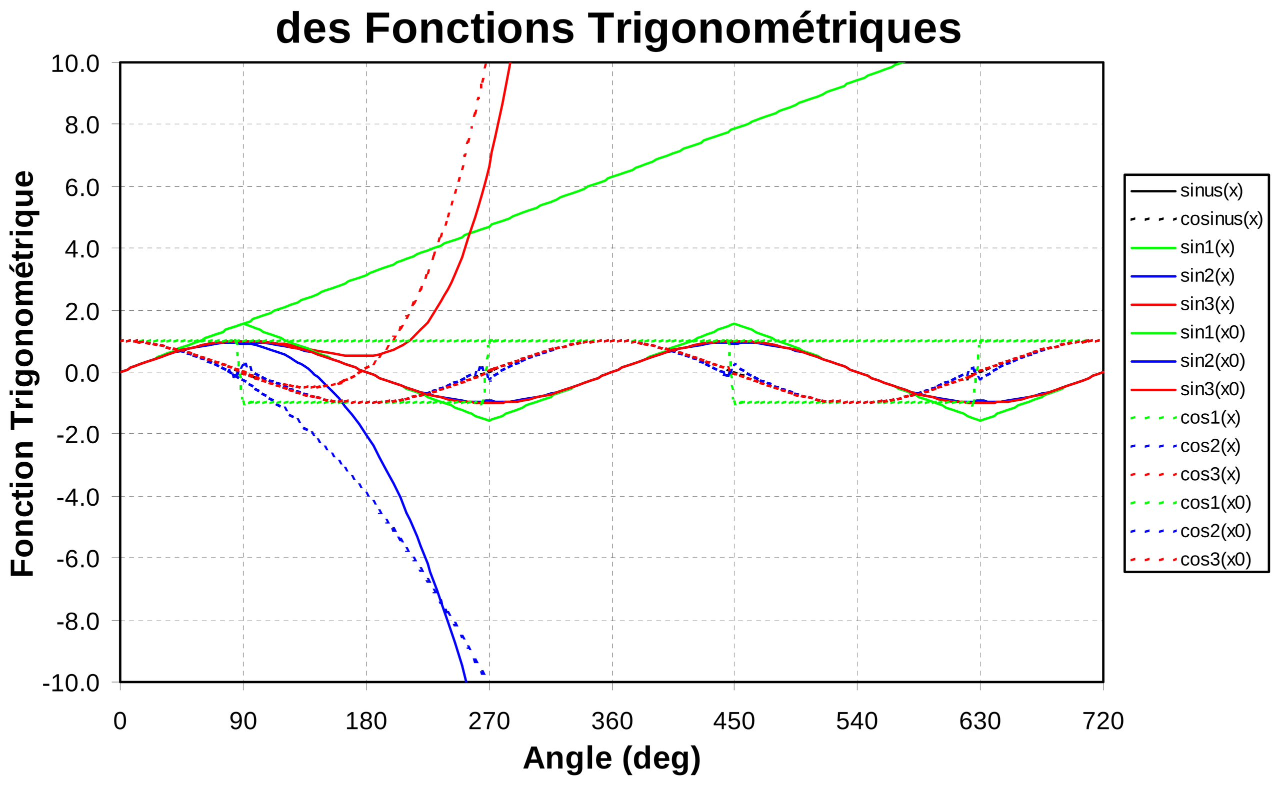
Fonctions Trigonométriques



Les fonctions trigonométriques sin(x) et cos(x) sont approximées par deux séries de Taylor:

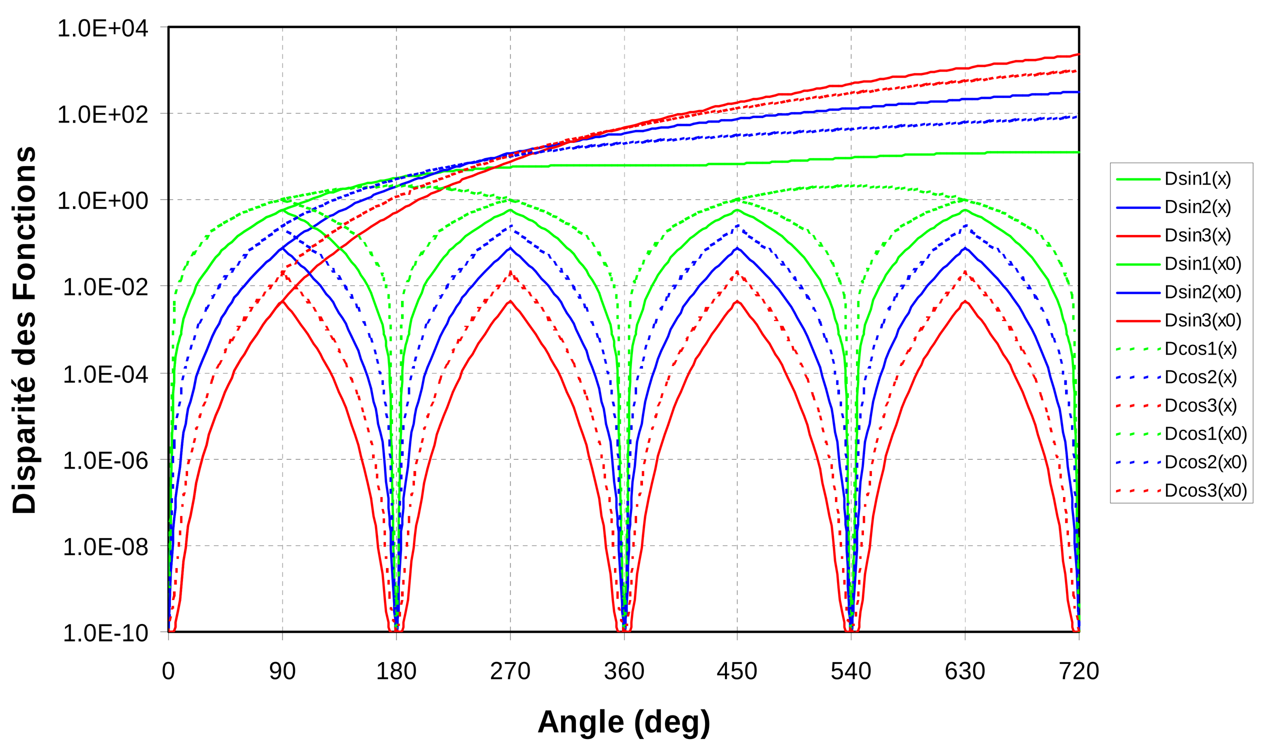
$$\sin(x) \cong x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots \qquad \cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots$$

Expansion de Taylor des Fonctions Trigonométriques



La série de Taylor sur la gamme entière d'angles est peu utile, mais sur la gamme reduite d'angles l'accord est assez bien. La différence est quantifié sur une échelle logarithmique.

Disparité des Séries de Taylor



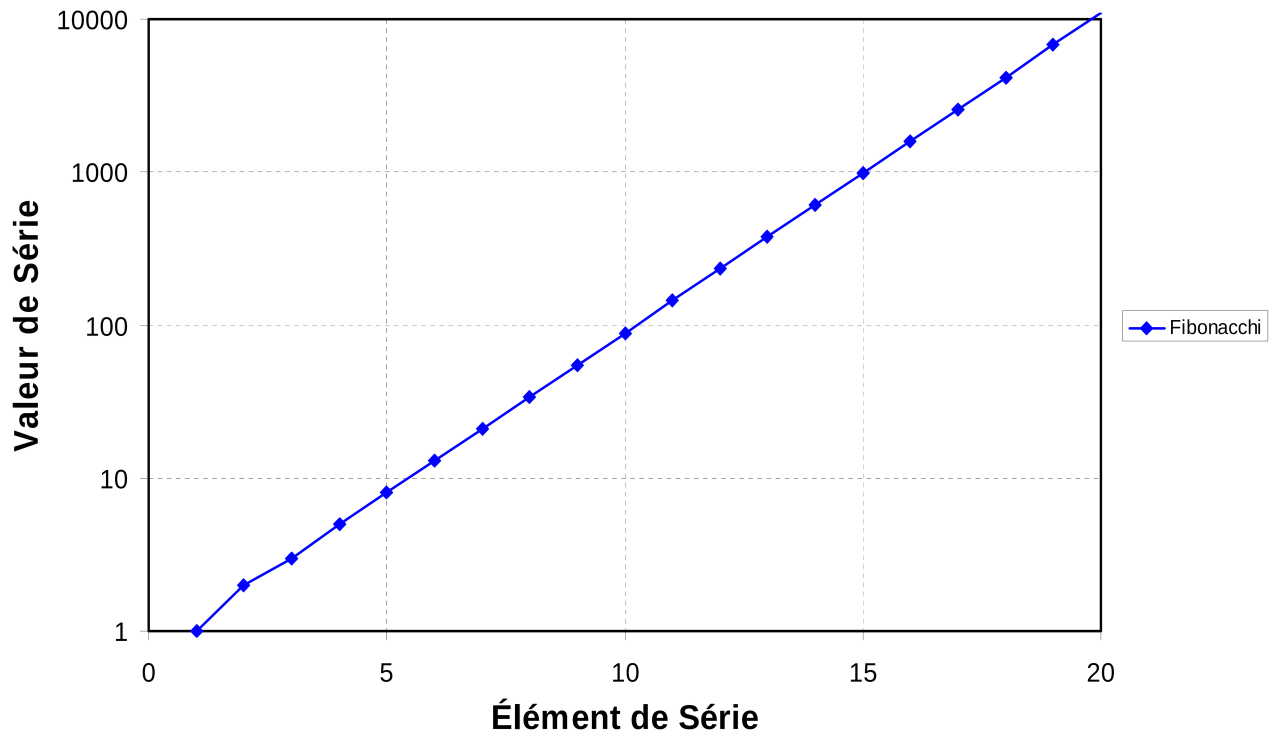
La disparité entre les vraies fonctions trigonométriques et leur série de Taylor est grande pour la gamme entière d'angles , mais beaucoup plus petite pour la gamme reduite d'angles . Ce serait mieux de calculer les fonctions trigonométriques sin(x) et cos(x) seulement entre 0° et 90°.

La série de Fibonacci commence avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Après, c'est calculée iterativement.
Chaque membre de la série de Fibonacci est la somme des deux membres précédents:
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

0																
		1														
0	+	1	=	1												
		1	+	1	=	2										
				1	+	2	=	3								
						2	+	3	=	5						
								3	+	5	=	8				
										5	+	8	=	13		
												8	+	13	=	21
0		1		1		2		3		5		8		13		21

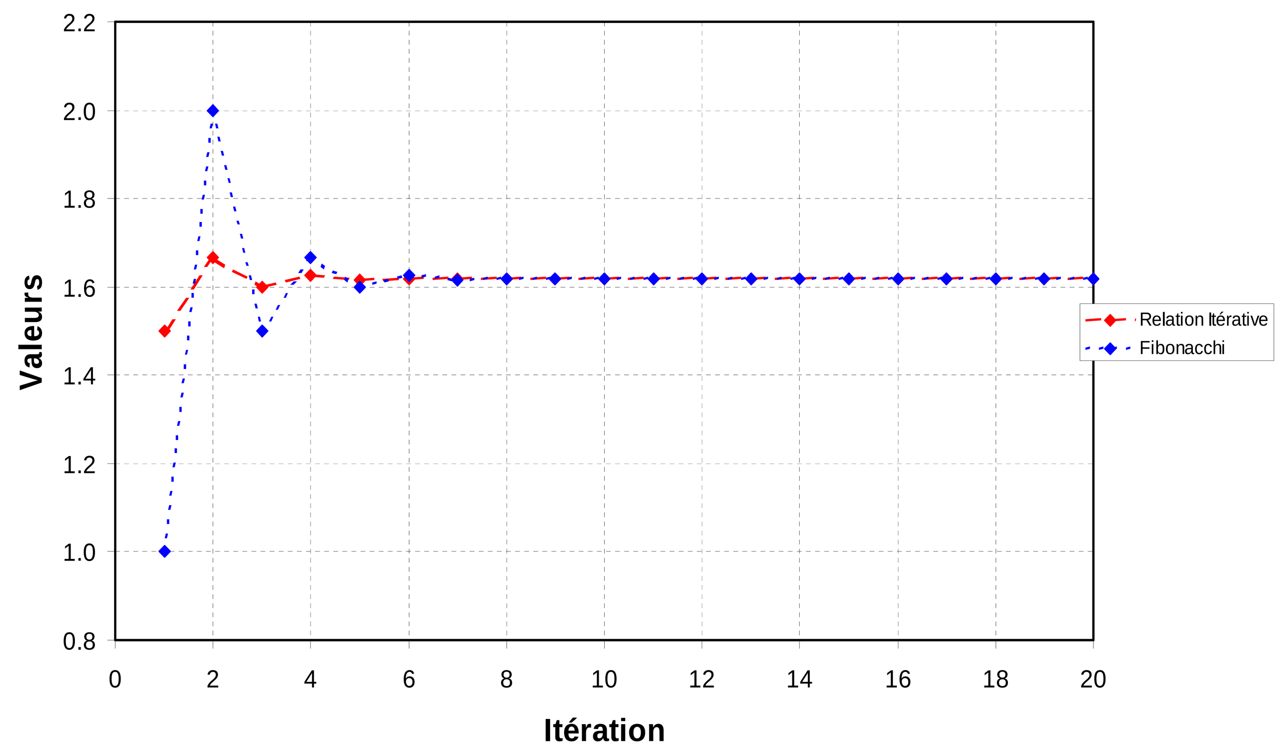
La série de Fibonacci croît rapidement. Sur une échelle **logarithmique** l'accroissement est linéaire. La série de Fibonacci croît en façon approximativement **exponentielle**.

Série de Fibonacci



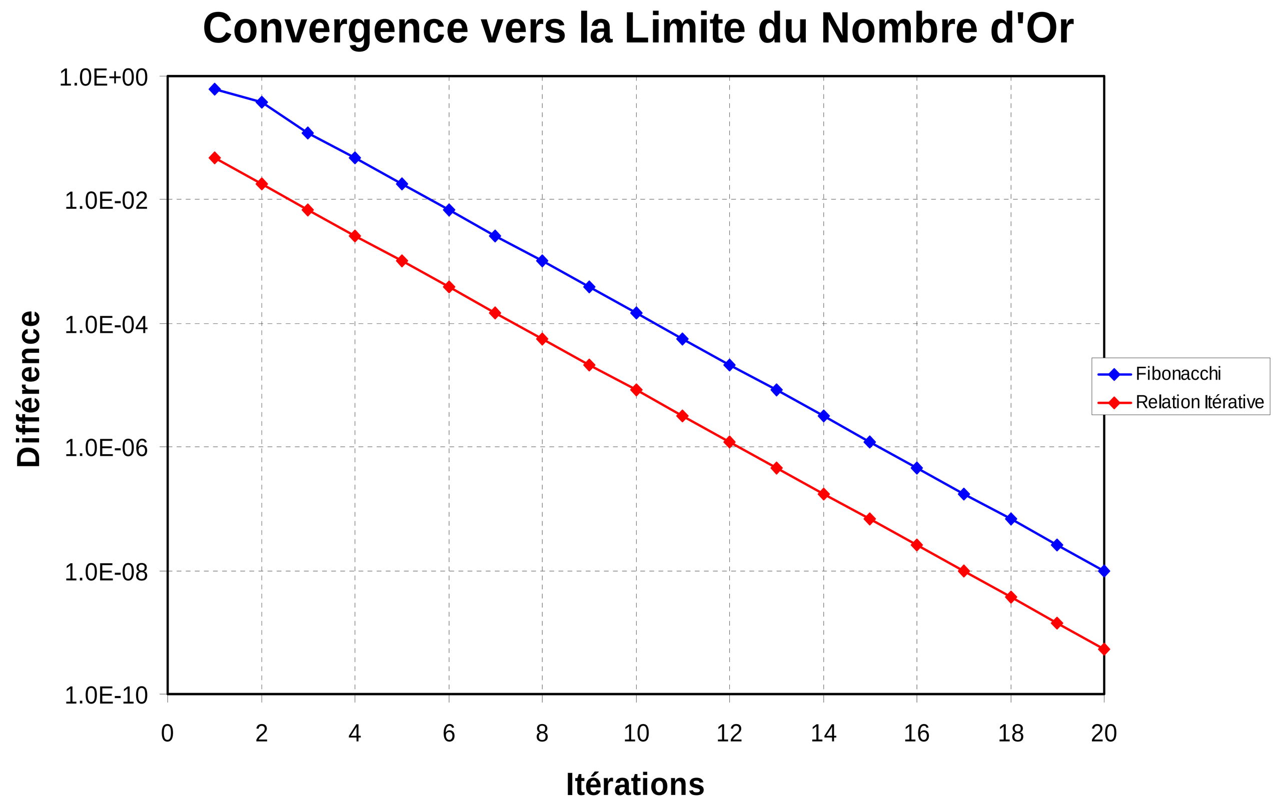
La série de Fibonacci est fortement liée au **Nombre d'Or**: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
Le rapport de deux membres successifs a_{n+1}/a_n converge vers cette limite.
Nous essayons aussi la rélation itérative $x_n = 1 + 1/x_{n-1}$.
Pour n'importe quel valeur initial x_0, elle converge vers la même limite, le **Nombre d'Or**.

Étude de Convergence



La différence vers la limite décroît rapidement. Sur une échelle logarithmique, la différence décroît linéairement. La convergence est donc exponentiellement rapide.

Convergence vers la Limite du Nombre d'Or



La convergence pour les deux relations est également rapide. La relation itérative est toujours inférieure à la série de Fibonacci. Donc, pour chaque itération la relation itérative obtient des resultats plus proche au Nombre d'Or; il est plus precis si nous voulons calculer le Nombre d'Or par des opérations élémentaires d'arithmetique.